Estimations de sommes

I Cesaro :

Th a) Soit (x_n) une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, si $(x_n) \to \ell$ alors $y_n = \frac{x_0 + \dots + x_n}{n+1} \to \ell$

b) Généralisation soit $\alpha_n \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ tq $\sum \alpha_k$ DV
si $x_n \to \ell$, $y_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} \to \ell$

RM : b) $\Rightarrow$ a) $\alpha_k = 1$

Démonstration b : soit $\varepsilon > 0$

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon$ $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$. Notons $A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k}{A_n} - \ell \right| = \left| \frac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x_k - \ell)}{\sum_{0}^{n} \alpha_k} \right| \underset{n > n_\varepsilon}{\leq} \left| \frac{\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} \alpha_k (x_k - \ell)}{A_n} \right| + \left| \frac{\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} \alpha_k (x_k - \ell)}{A_n} \right|$$

de là $$\left| \frac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k}{A_n} \right| \leq \frac{\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} \alpha_k |x_k - \ell|}{A_n} + \frac{\left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} \alpha_k \right) \varepsilon}{A_n}$$

$$\leq \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} \alpha_k |x_k - \ell| + \varepsilon$$

par hyp, $A_n \to +\infty$, et comme $\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} \alpha_k |x_k - \ell|$ est fixé par ε

On trouve $n'_\varepsilon \geq n_\varepsilon$ tq $\forall n \geq n'_\varepsilon$, $\dfrac{\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} \alpha_k |x_k - \ell|}{A_n} \leq \varepsilon$

et donc $\forall n \geq n'_\varepsilon$ $\left| \dfrac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x_k - \ell)}{A_n} \right| \leq 2\varepsilon$ /

RM : 1) Si (x_n) est convergente, $\dfrac{x_0 + \dots + x_n}{n+1}$ aussi

2 - Réciproque fausse : $x_n = (-1)^n$ $\dfrac{x_0 + \dots + x_n}{n} = \dfrac{1-(-1)^n}{2(n)} \to 0$

alors que (x_n) Diverge

3) I Si $\dfrac{x_0 + \dots + x_n}{n+1}$ CV $x_n = o(n)$

On écrit $y_n = L + \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \to 0$, alors

$(n+1) y_n = (n+1) L + (n+1) \varepsilon_n$

$n y_{n-1} = nL + n \varepsilon_{n-1}$

par différence $x_n = (n+1) y_n - n (y_{n-1}) = \cancel{L} + (n+1)\varepsilon_n - n\varepsilon_{n-1}$
$= o(n)$

Extension en $+\infty$: Si $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$

y_n = somme de Césaro

Soit $M > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq N$, $x_n \geq M$ (Hyp)

Soit $n \geq N$: $y_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k}{A_n} = \dfrac{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k x_k}{A_n} + \dfrac{\sum_{k=N+1}^{n} \alpha_k x_k}{A_n}$

$\geq \dfrac{A}{A_n} + \dfrac{M \sum_{k=N+1}^{n} \alpha_k}{A_n}$

$$\frac{M\sum_{N+1}^{n}\alpha_k}{A_n} = \left(\frac{A_n - A_N}{A_n}\right)M = \left(1-\frac{A_N}{A_n}\right)M$$
$$\to 1$$

il existe $N_1 \geq N$ tq $\forall n \geq N_1$, $\frac{A_n - A_N}{A_n} \geq \frac{3}{4}M$

$$\frac{A}{A_n} \geq \frac{M}{4}$$

(CC) $\forall n \geq N_1$, $y_n \geq \frac{M}{2}$

Conséquence Si $x_n \nearrow$ (y_n) CV $\Rightarrow$ (x_n) CV

En effet $x_n \to +\infty \Rightarrow y_n \to +\infty$ (WTF?)

APPLICATIONS : ① Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Si $(u_{n+1} - u_n) \to L \in \mathbb{C}$
alors $\frac{u_n}{n} \to L$

En effet, $\frac{\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)}{n+1} \to L$ (Césaro)

donc $L = \frac{u_{n+1} - u_0}{n+1}$ $\to 0$ donc $\frac{u_{n+1}}{n+1} \to L$

② "D'alembert implique Cauchy !
Soit $u_n \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to L \,(\in [0,+\infty[)$ alors $\sqrt[n]{u_n} \to L$

D/ Par ex $0 < L < +\infty$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to L \Rightarrow \log u_{n+1} - \log u_n \to \log L$

$\Rightarrow \frac{\log u_n}{n} \to P$ $\Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \to L$

③ Soit $u_0 > 0$ $u_{n+1} = \arctan u_n$ On sait que $u_n \searrow 0$

équivalent de u_n ?

STUCE !

Idée : Chercher $\alpha > 0$ tq $\frac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \frac{1}{u_n^{\alpha}} \to L$ fini

Calculons : $\frac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \frac{1}{u_n^{\alpha}} = \frac{u_n^{\alpha} - u_{n+1}^{\alpha}}{(u_{n+1} u_n)^{\alpha}}$

$\to u_{n+1} = \arctan u_n = u_n - \frac{u_n^3}{3} + o(u_n^3)$

$= u_n\left(1 - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)\right)$

donc $\frac{u_n^{\alpha} - u_{n+1}^{\alpha}}{(u_{n+1} u_n)^{\alpha}} = \frac{u_n^{\alpha}}{(u_{n+1} u_n)^{\alpha}}\left(1 - \left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right)^{\alpha}\right)$

$= \frac{1}{(u_{n+1})^{\alpha}}\left(1 - \left(1 - \frac{u_n^2 \alpha}{3} + o(u_n^2)\right)\right)$

$= \frac{1}{u_n^{\alpha}(\ldots)^{\alpha}}\left(\frac{\alpha u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right)$

$\to$ si $\alpha = 2$: $= \frac{2/3 + o(1)}{\left(1 - u_n^2/3 + o(u_n^2)\right)^2} \to 2/3$

il en résulte avec Cesaro $\frac{1}{n u_n^2} \to 2/3$

et donc $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}}$

ANALOGIE : $y' = \varphi(y) \to$ on cherchera sol $(y^{2})'$

Exercices : "à la césaro"

① Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$. Etudier $\lim_{p\to+\infty} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$

S/ $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$

pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a $\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \leq \left((b-a)\|f\|_\infty^p\right)^{1/p}$

$= (b-a)^{1/p} \|f\|_\infty$

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists p_0 \in \mathbb{N}^* \; \forall p \geq p_0 \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \leq (1+\varepsilon)\|f\|_\infty$

f étant $\mathcal{C}^0$, il existe $t_0 \in [a,b]$ tq $|f(t_0)| = \|f\|_\infty$

par ex $t_0 \in]a,b[$

Par $\mathcal{C}^0$ de f $\exists \delta > 0$ tq $\forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$

$|f(t)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$

Delà $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \geq \left(\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |f(t)|^p\right)^{1/p}$

$\geq (2\delta)^{1/p} (\|f\|_\infty - \varepsilon)$

et donc $\exists p_2 > p_1 \; \forall p \geq p_2 \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \geq (1-\varepsilon)(\|f\|_\infty - \varepsilon)$

② Th de Fekete : Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\forall m,n \in \mathbb{N}^2 \; u_{m+n} \leq u_m + u_n$

Mq $\frac{u_n}{n} \to \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{u_n}{n}\right) = \ell$

Obs: $u_2 \leq 2u_1$, $\frac{u_2}{2} \leq \frac{u_1}{1}$, $\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_1}{1}$, $\frac{u_3}{3} \leq \frac{u_2+u_1}{3}$

Division euclidienne $m > n$: $m = qn + r$

$$u_m \leq u_{qn} + u_r \leq q u_n + u_r$$

donc $\frac{u_m}{m} \leq \frac{q}{m} u_n + \frac{u_r}{m}$

$\lambda > -\infty$ posons Soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{u_n}{n} < \lambda + \varepsilon$

il vient Soit $N \in \mathbb{N}$ $\left|\frac{u_r}{m}\right| < \varepsilon$, il vient

$$\forall m \geq N \quad \frac{u_m}{m} \leq \underbrace{\frac{q}{m} n}_{\longrightarrow 1}(\lambda - \varepsilon) + \varepsilon$$

donc le membre de droite tend vers $\lambda + 2\varepsilon$

$$\exists N' > N \ \forall m \geq N' \quad \frac{u_m}{m} \leq \lambda + 2\varepsilon$$

Application: Capacité, croissance de groupes...
complexité

Cesàro et nombres complexes:

Ex: Soit $z \in S^1 \setminus \{1\}$. Alors la suite (z^n) tends vers 0 au sens de Cesàro

S/ $$\frac{1 + \dots + z^n}{n+1} = \frac{\overbrace{z^{n+1} - 1}^{\leq 2 \text{ en module}}}{(z-1)(n+1)} \longrightarrow 0$$

Ex: Soit $z_1, \dots, z_p \in (S^1)^p$ tq $z_1^n + \dots + z_p^n$ CV

Mq $z_1 = \dots = z_p = 1$

S/ On montre par récurrence sur p

$p=1$ si $z \neq 1$, $|z^{n+1} - z^n| = |1-z| > 0$ donc z^n DV

$p=2$ ABS $z_1^n + z_2^n$ CV avec par ex $z_1 \neq 1$

si $z_2 = 1$ alors z_1^n CV : absurde

$\rightarrow z_2 \neq 1$ alors on note $L = \lim(z_1^n + z_2^n)$

exo précédent $\rightarrow$ la suite $z_1^n + z_2^n$ tend vers 0 au sens de Césaro

donc $L = 0$. Mais alors $z_1^n \left(1 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n\right) \rightarrow 0$

donc $1 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n \rightarrow 0$, finalement $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n \rightarrow -1$ exclu

$p \geq 3$: ABS $z_1^n + \dots + z_p^n$. On élimine les termes égaux à 1, la suite tend vers 0 au sens de Césaro $L = 0$

de là $(z_p)^n \left(1 + \left(\frac{z_1}{z_p}\right)^n + \dots + \left(\frac{z_{p-1}}{z_p}\right)^n\right) \rightarrow 0$

Finalement $\left(\frac{z_1}{z_p}\right)^n + \dots + \left(\frac{z_{p-1}}{z_p}\right)^n \rightarrow -1$

exclu par H_n

RM : $|z_1| = \dots = |z_p| = 1$ $\exists \varphi$ $\varphi \nearrow^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$ tq $z_1^{\varphi(n)} + \dots + z_p^{\varphi(n)} \rightarrow p$ cad

P'n extractions successives et BW

$z_1^{\varphi(n)} \rightarrow L_1, \dots, z_p^{\varphi(n)} \rightarrow L_p$

pas forcément / on restreint

On regarde $\varphi_0(n) = \psi(2^n) - \psi(n) \to +\infty$

$$(\beta_1)^{\varphi_0(n)} + \dots + (\beta_p)^{\varphi_0(n)} = \frac{\beta_1^{\psi(2^n)}}{\beta_1^{\psi(n)}} + \dots + \frac{\beta_p^{\psi(2^n)}}{\beta_p^{\psi(n)}} \to p$$

II Restes de séries :

Rappel : si $f \downarrow$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$ $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k)$

$$R_n = \sum_{n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f \leq R_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} f$$

Th : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs ; on suppose $\sum v_n$ convergente

i) Si $u_n = O(v_n)$ (resp $o(v_n)$), $\sum u_n$ CV et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_n\right)$

(resp $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$)

ii) Si $u_n \sim v_n$, $\sum_n^{+\infty} u_k \sim \sum_n^{+\infty} v_k$

D/ i) On traite $u_n = o(v_n)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq n_\varepsilon$ $0 \leq u_n \leq \varepsilon v_n$ donc $\sum u_n$ CV

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

ii) $u_n - v_n = o(v_n) \Rightarrow \sum_n^{+\infty} u_k - \sum_n^{+\infty} v_k = o\left(\sum_n^{+\infty} v_k\right)$

$\quad$ donc $\sum_n^{+\infty} u_k \sim \sum_n^{+\infty} v_k$

Ex I : Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \log(1+n) + \log n$$

$$= \frac{1}{n+1} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

La série CV donc $u_n \to \gamma$. On veut estimer $\gamma - u_n$

$$\gamma - u_n = \lim_{p\to+\infty} (u_p - u_n) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n}^{p-1} u_{k+1} - u_k$$

$$= \sum_{n}^{+\infty} \underbrace{u_{k+1} - u_k}_{v_k}$$

$$v_k = -\frac{1}{2k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

$$\frac{1}{n} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n-1} \text{ donc } \sum_{n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} O\left(\frac{1}{k^3}\right) = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right) = O\left(\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^3}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

finalement $\gamma - u_n = \sum_{n}^{+\infty} v_k = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$B_n = \int_0^1 B_{n-1}$ et donc $H_n = \log n + \gamma - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

III Estimation de sommes :

Thm : Soit $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries numériques avec $v_n \geq 0$

i) On suppose que $\sum v_n$ diverge

Si $u_n = o(v_n)$, $U_n = \sum_0^n u_k = o\left(\underbrace{\sum_0^n v_k}_{V_n}\right)$

ii) Si $u_n \sim v_n$ alors $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$

I/ i) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon \; |u_n| < \varepsilon v_n$

Pour $n > n_\varepsilon$ $\frac{|U_n|}{V_n} \leq \frac{\left|\sum_0^{n_\varepsilon} u_k\right|}{V_n} + \frac{\left|\sum_{n_\varepsilon+1}^{n} u_k\right|}{V_n}$

$\leq \frac{|U_{n_\varepsilon}|}{V_n} + \frac{\varepsilon(v_{n_\varepsilon+1} + \dots + v_n)}{V_n}$

$\exists n'_\varepsilon : \forall n \geq n'_\varepsilon$ $\longrightarrow 0$ ≤ 2

$\leq 2\varepsilon$ OK.

RM : $v_n > 0$ $u_n = \underbrace{\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}_{\varepsilon_n \to 0} v_n$

On a M q $\frac{\sum_0^n \varepsilon_k v_k}{\sum_0^n v_k} \longrightarrow 0$ Cesàro

Ex : $u_{n+1} = \operatorname{Arctg} u_n$ (>0) $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} - u_n \sim -\frac{u_n^3}{3} \\ y' = -\frac{y^3}{3} \end{array} \right.$ $\frac{1}{y^2} = \frac{2t}{3} + C$

$$g(u_n) = \frac{1}{u_n^2} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_{n+1}^2 u_n^2}$$

$$= \frac{u_n^2 - u_n^2\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^4}{5} + o(u_n^6)\right)^2}{u_n^4\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^4)\right)}$$

$$= \frac{u_n^2 - u_n^2 + \frac{2}{3}u_n^4 - u_n^6\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{5}\right) + o(\ldots)}{u_n^4\left(1 - \frac{2u_n^2}{3} + o(u_n^4)\right)}$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{5}\right)u_n^2\right)\left(1 + \frac{2}{3}u_n^2 + o(1)\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{9} - \frac{23}{45}\right) u_n^2 + o(1)$$

$\frac{2}{5} - \frac{1}{15} u_n^2 + o(u_n^2)$

On somme $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} = \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{n u_n^2} - \frac{1}{n u_0^2}$

$$= \frac{2n}{3} - \frac{1}{15n} \sum_{n=0}^{n} u_k^2 + \sum_{k=0}^{n} o(u_k^2)$$

$u_k \sim \sqrt{\frac{2}{3k}}$ $u_k^2 \sim \frac{2}{3k}$ série DV

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 \sim \frac{2}{3} \log n$$

Reprenons : $u_n = \left(\frac{2n}{3} - \frac{1}{15} \frac{2}{3} \log n + o\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{3}{2n}} \left(1 - \frac{\log n}{10n} \frac{2}{3} + o\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)^{-\frac{1}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2n}} \left(1 + \frac{\log(n)}{30n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)$$

Ex : $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ On regarde $x_{n+1}^2 - x_n^2$

$x_{n+1}^2 - x_n^2 = \frac{1}{x_n^2} + 2 \sim 2$

$x_{n+1}^2 - x_0 \sim 2(n+1)$

$x_n \sim \sqrt{2n}$ $\quad \sum x_{n+1}^2 - x_n^2 \quad \sum \frac{1}{x_n^2} \sim 2n \quad \sim 2n \quad 85 \sim \frac{1}{2} \log n$

$x_n = \sqrt{2n} \sqrt{1 + \frac{\log n}{\dots} + o\left(\frac{\log n}{n}\right)}$ $\quad x_{n+1}^2 - x_0 = 2n + \frac{1}{2} \log n + o(\log n)$

$= \sqrt{2n}\left(1 + \frac{\log n}{8n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)$

$x_n = \sqrt{2n}\left(1 + \frac{\ln n}{8n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$

E41 $\sum_{k=0}^{n} e^{k^2}$

La comparaison série intégrale ne marche (pas)

$\int \left(\sum e^{kt}\right)$

pas équivalent

S1 : $S_n = e^{n^2} \sum_{k=0}^{n} e^{k^2 - n^2} = e^{n^2} \sum_{k=0}^{n} e^{(n-k)^2 - n^2}$

$= e^{n^2} \sum_{k=0}^{n} e^{-2nk + k^2}$

$= e^{n^2}\left(1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} e^{k^2 - 2nk}}_{T_n}\right)$

STU le $e^{k^2} \sim e^{k^2} - e^{(k-1)^2}$

$S_n \sim e^{n^2}$